

分析表面粗糙有耗波导传输特性的频域有限差分方法

黄斌科¹, 胡红¹, 宁曰民², 蒋延生¹

(1. 西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安; 2. 华东电子测量仪器研究所, 266555, 山东青岛)

摘要: 提出了一种分析金属有耗和表面粗糙对波导传输特性影响的频域有限差分方法(FDFD). 该方法按照 Maxwell 方程组的旋度方程对波导横截面内部场分量进行差分展开, 对波导的有耗金属边界和表面粗糙边界分别采用表面阻抗边界条件(SIBC)和等效 SIBC 代替. 将波导内部节点场分量及边界节点场分量满足的方程联立形成特征矩阵方程组, 通过求解特征矩阵的特征值可得到指定频率下金属波导的传播常数. 和微扰法相比, FDFD 方法能分析截止频率以下及形状不规则时表面粗糙有耗波导的传输特性. 数值仿真结果表明, 随着粗糙度的增大, 金属衰减损耗逐渐增大到表面光滑时损耗的 2 倍.

关键词: 频域有限差分; 传播常数; 粗糙表面; 等效表面阻抗边界条件

中图分类号: TN814 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)10-0085-04

A Finite Difference Frequency Domain Method for Waveguide with Rough Surface and Imperfect Conductor

HUANG Binke¹, HU Hong¹, NING Yuemini², JIANG Yansheng¹

(1. School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. East China Institute of Electronic Measurement Instrument, Qingdao, Shandong 266555, China)

Abstract: A finite difference frequency domain method (FDFD) is presented to analyze the propagation characteristics of waveguides with imperfect conductor and rough surface. Two curl equations in the Maxwell system are discretized with difference method in the cross-section of the waveguide, and the loss surfaces and rough surfaces of the waveguide are replaced by the surface impedance boundary conditions (SIBC) and the equivalent SIBC, respectively. Then the eigen equations about the electromagnetic field components are formed and solved to obtain the propagation constants for a given frequency. Comparison with the perturbation method shows that the presented method is effective when the interested frequency is under cutoff frequency and the waveguide has irregular boundary. The simulation results show that with the increase of roughness, the attenuation constant is gradually increased to 2 times of that with smooth surfaces.

Keywords: finite difference frequency domain; propagation constant; rough surface; equivalent surface impedance boundary condition

波导传输特性的研究是微波理论和工程中的基本问题, 其分析方法一般有微扰法、时域有限差分法(FDTD)和频域有限差分法(FDFD)等方法. 微扰法根据理想波导中的场分布近似估算导体损耗的大小, 该方法形式简单, 在截止频率以上及损耗较小时

结果较好, 因而在分析规则形状波导时得到了广泛应用^[1]. FDTD 方法在时域迭代, 利用离散傅里叶变换将时域信号变换到频域来分析波导传输特性, 存储量大, CPU 耗时长, 且必须预先给出传播常数^[2-3]. 采用 FDFD 方法则无需提前给定传播常数,

就可直接求得指定频率下波导的传播常数. Wang 等人^[4]考虑了金属波导壁有耗对矩形波导传输特性的影响,利用二维 6 变量 FDFD 方法,结合表面阻抗边界条件(SIBC)得到了给定频率下有耗波导的传播常数,并指出在分析高频特别是毫米波段有耗波导的传输特性时非常有效,但该方法只考虑了表面光滑波导.

在高频毫米波段,除了要考虑金属波导作为非理想导体引起的损耗外,本文将考虑表面粗糙有耗波导对波导传输特性的影响,将表面粗糙度的影响引入到表面阻抗中,得到了等效表面阻抗^[5]. 采用 FDFD 方法将波导内部电磁场分量在频域差分展开,使用表面阻抗及等效表面阻抗对有耗金属边界及表面粗糙有耗金属边界的切向电磁场分量进行处理,使得整个波导空间的电磁场分量形成特征值矩阵方程. 通过求解矩阵的特征值,可得到给定频率下金属波导的多个模式的传播常数,包括衰减常数和相位常数.

1 二维-FDFD 法的理论分析

对电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$ 进行归一化,有

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}/\eta_0^{1/2} \quad (1)$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}\eta_0^{1/2} \quad (2)$$

式中: $\eta_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ 为自由空间波阻抗. Maxwell 方程的旋度方程在归一化电磁场中为^[4]

$$\nabla \times \mathbf{E}' = -jk_0 \mathbf{H}' \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}' = jk_0 \boldsymbol{\epsilon}_r \mathbf{E}' \quad (4)$$

式中: $k_0 = \omega(\mu_0 \boldsymbol{\epsilon}_0)^{1/2}$; $\boldsymbol{\epsilon}_r$ 表示各向异性介质的相对介电常数. 为简单起见,以下用 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 分别代替 $\mathbf{E}'$ 、 $\mathbf{H}'$.

假设波导沿传播方向均匀,波沿 $+z$ 方向传播,波导内的场可表示如下^[4]

$$\mathbf{E}(x, y, z) = [E_x(x, y)\mathbf{e}_x + E_y(x, y)\mathbf{e}_y + E_z(x, y)\mathbf{e}_z]e^{-\gamma z} \quad (5)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = [H_x(x, y)\mathbf{e}_x + H_y(x, y)\mathbf{e}_y + H_z(x, y)\mathbf{e}_z]e^{-\gamma z} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$ 分别为 x 、 y 和 z 方向的单位矢量.

将式(5)、式(6)代入式(3)、式(4),得

$$-j\frac{\gamma}{k_0}E_x = j\frac{1}{k_0}\frac{\partial E_z}{\partial x} + H_y \quad (7)$$

$$-j\frac{\gamma}{k_0}E_y = j\frac{1}{k_0}\frac{\partial E_z}{\partial y} - H_x \quad (8)$$

$$-j\frac{\gamma}{k_0}E_z = -j\frac{1}{k_0}\left[\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}}\frac{\partial E_y}{\partial y}\right] \quad (9)$$

$$-j\frac{\gamma}{k_0}H_x = j\frac{1}{k_0}\frac{\partial H_z}{\partial x} - \epsilon_{yy}E_y \quad (10)$$

$$-j\frac{\gamma}{k_0}H_y = j\frac{1}{k_0}\frac{\partial H_z}{\partial y} + \epsilon_{xx}E_x \quad (11)$$

$$-j\frac{\gamma}{k_0}H_z = -j\frac{1}{k_0}\left[\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right] \quad (12)$$

式中: ϵ_{xx} 、 ϵ_{yy} 、 ϵ_{zz} 分别为相对介电常数在 x 、 y 、 z 方向的分量.

按 Yee 网格差分,可得场分量在波导内部空间的差分方程

$$-j\frac{\gamma}{k_0}E_x(i, j) = j\frac{1}{k_0 h_x}[E_z(i+1, j) - E_z(i, j)] + H_y(i, j) \quad (13)$$

$$-j\frac{\gamma}{k_0}E_y(i, j) = j\frac{1}{k_0 h_y}[E_z(i, j+1) - E_z(i, j)] - H_x(i, j) \quad (14)$$

$$-j\frac{\gamma}{k_0}E_z(i, j) = -j\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}k_0 h_x}[E_x(i, j) - E_x(i-1, j)] - j\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}k_0 h_y}[E_y(i, j) - E_y(i, j-1)] \quad (15)$$

$$-j\frac{\gamma}{k_0}H_x(i, j) = j\frac{1}{k_0 h_x}[H_z(i, j) - H_z(i-1, j)] - \epsilon_{yy}E_y(i, j) \quad (16)$$

$$-j\frac{\gamma}{k_0}H_y(i, j) = j\frac{1}{k_0 h_y}[H_z(i, j) - H_z(i, j-1)] + \epsilon_{xx}E_x(i, j) \quad (17)$$

$$-j\frac{\gamma}{k_0}H_z(i, j) = -j\frac{1}{k_0 h_x}[H_x(i+1, j) - H_x(i, j)] - j\frac{1}{k_0 h_y}[H_y(i, j+1) - H_y(i, j)] \quad (18)$$

式中: (i, j) 表示二维 Yee 网格序号; h_x 和 h_y 表示 Yee 网格在 x 和 y 方向的步长.

对于光滑有耗金属波导的边界的处理,应用表面阻抗边界将切向电场及切向磁场联系起来,有

$$\mathbf{E}_{\tan} = Z_s \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\tan} \quad (19)$$

式中: $Z_s = (1+j)/(\delta\sigma)$ 为表面阻抗,其中 $\delta = 1/(\pi f \mu \sigma)^{1/2}$ 为金属导体的趋肤厚度, σ 为金属电导率.

对表面粗糙有耗金属波导的边界问题,采用等效表面阻抗的方法,用表面起伏高度的均方根值表征粗糙度,将表面粗糙有耗金属波导等效为表面光滑有耗波导,其等效后的表面阻抗为^[5]

$$Z_{\text{eff}} = Z_s \left[1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left(1.4 \left(\frac{\Delta}{\delta} \right)^2 \right) \right] \quad (20)$$

式中: Δ 为粗糙度; Z_s 为波导壁光滑时的表面阻抗.

对于有耗金属波导边界切向电场的处理,如图 1 所示,分别以左边界切向电场 E_z 的处理,左边界

切向电场 E_y 的处理及左上角网格边界的切向电场 E_x 、 E_y 的联合处理为例,给出边界上场节点的差分方程

$$-j \frac{\gamma}{k_0} E_z = Z_s \left(-j \frac{\gamma}{k_0} H_y \right) =$$

$$Z_s \left[j \frac{1}{k_0 h_y} (H_z(2) - H_z(1)) + \epsilon_{xx} E_x(1) \right] \quad (21)$$

$$-j \frac{\gamma}{k_0} H_z = \left[1 / (j \frac{1}{k_0 h_x} Z_s - 1) \right] \left[j \frac{1}{k_0 h_x} H_x(1) - \right.$$

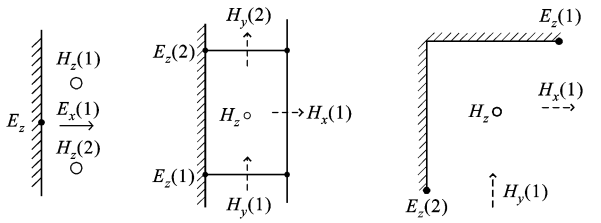
$$j \frac{1}{k_0 h_y} H_y(1) + j \frac{1}{k_0 h_y} H_y(2) - \frac{1}{k_0^2 h_x h_y} E_z(1) +$$

$$\left. \frac{1}{k_0^2 h_x h_y} E_z(2) \right] \quad (22)$$

$$-j \frac{\gamma}{k_0} H_z = \left[1 / (1 - j \frac{1}{k_0 h_x} Z_s - j \frac{1}{k_0 h_y} Z_s) \right] \cdot$$

$$\left[-j \frac{1}{k_0 h_x} H_x(1) + j \frac{1}{k_0 h_y} H_y(1) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{k_0^2 h_x h_y} E_z(2) - \frac{1}{k_0^2 h_x h_y} E_z(1) \right] \quad (23)$$



(a)左边界 E_z (b)左边界 E_y (c)左上角网格边界 E_x 、 E_y 的联合处理

图 1 有耗金属波导边界切向电场的处理

联立有耗波导边界节点及内部节点所有电磁场分量满足的差分方程,得出有耗波导传输常数 γ 满足的特征值矩阵方程

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \quad (24)$$

式中: $\mathbf{X} = \{E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z\}^T$; $\lambda = -j\gamma/k_0 = (\beta - j\alpha)/k_0$; $\mathbf{A}$ 是稀疏矩阵。通过求解矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值,可得到波导的传播常数 γ 。

2 数值算例

2.1 有耗金属矩形波导的传播常数

有耗金属矩形波导的尺寸为 $9.525 \text{ mm} \times 4.500 \text{ mm}$,波导壁为铜,电导率为 $5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ 。采用本文方法仿真该有耗波导得到各模式的截止频率,并和该尺寸波导壁为理想导体时对应模式的截止频率进行比较,结果如表 1 所示。图 2 给出了使用本文方法仿真有耗矩形波导各模式的相位常数随频

率的变化曲线,并和理想矩形波导相位常数进行了比较,两者一致性较好。当有耗金属导体作为波导壁时,导体内会产生电流,从而在导体表面上产生功率损耗。采用本文方法和微扰法^[1]分别对有耗矩形波导的衰减常数作仿真,衰减常数随频率的变化曲线见图 3。由图 3 可以看出,两种方法的结果吻合得较好。

表 1 有耗金属矩形波导和理想金属波导截止频率比较

波导模式	TE ₁₀	TE ₂₀	TE ₀₁	TE ₁₁ (TM ₁₁)
有耗波导截止频率/GHz	15.8	31.4	33.3	36.9
理想波导截止频率/GHz	15.8	31.5	33.3	36.9

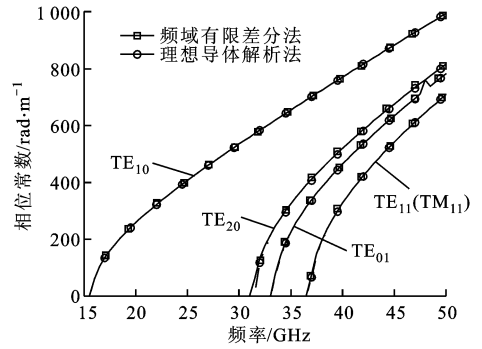


图 2 有耗金属矩形波导的相位常数

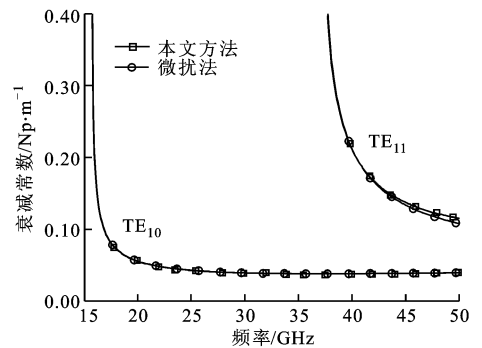


图 3 有耗金属矩形波导的衰减常数

传统微扰法应用的前提条件是 $\omega\mu\sigma \ll |k_c^2 - k^2|$,当频率接近截止频率时微扰法的条件无法满足,得到的衰减常数趋向于无穷,因此在截止频率附近及截止频率以下微扰法是不适用的^[1]。本文的 FDFD 方法可以在截止频率以下进行传输特性的模拟,且编写的程序具有通用性,对于不同形状的波导只需设置相应的边界条件,因此能够用于分析边界结构比较复杂的波导。

定义衰减常数达到最小的频率为最小衰减频率. 对 TE_{10} 模式来说, 最小衰减频率 $f_{\min} = 2.38f_c$. 当频率高于截止频率且低于最小衰减频率时, 衰减常数 α 随着频率的增加而减小; 当频率高于最小衰减频率时, 表面阻抗的增加引起衰减常数 α 随频率增加.

2.2 表面粗糙有耗金属矩形波导的传播常数

取金属波导表面粗糙度与趋肤厚度相当, 利用等效表面阻抗分析表面粗糙度对衰减常数的影响^[5]. 在 15~50 GHz 频段铜材料的趋肤厚度为 $0.27 \sim 0.49 \mu\text{m}$, 选择 $0 \sim 3 \mu\text{m}$ 之间不同的粗糙度对 TE_{10} 模式的衰减常数进行仿真, 仿真模型为 $9.525 \text{ mm} \times 4.500 \text{ mm}$ 的矩形波导, 导体表面金属为铜. 图 4 给出了表面光滑和粗糙度分别为 $0.2 \mu\text{m}$ 、 $3 \mu\text{m}$ 时波导的衰减常数. 从图 4 可见, 随着粗糙度的增加, 表面粗糙矩形波导的衰减常数越来越大.

对粗糙度使用趋肤厚度进行归一化, 对衰减常数使用表面光滑时的衰减常数进行归一化. 归一化粗糙度和归一化衰减常数之间的变化关系如图 5 所示. 从图 5 可以看出, 对 TE_{10} 模式来说, 当归一化粗糙度 $\Delta/\delta \geq 5$ 时, 归一化衰减常数趋向 2. 在 TE_{10}

模式下, 金属波导内壁的粗糙度与电流方向垂直, 随着归一化粗糙度的增大, 金属衰减损耗逐渐增大到表面光滑时损耗的 2 倍, 与文献[6-7]的结果一致.

3 结 论

结合表面阻抗边界及粗糙等效表面阻抗, 本文采用二维频域有限差分方法对表面粗糙有耗金属波导的传输特性进行了分析. 数值仿真结果给出了不同表面粗糙度对矩形波导衰减常数的影响, 与现有文献结果吻合较好, 表明了本文方法的正确性和有效性. 本文的 FDFD 方法程序实现具有通用性, 有望推广到不规则表面粗糙有耗波导的传输特性分析.

参考文献:

- [1] 张克潜, 李德杰. 微波与光电子学中的电磁理论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2001.
- [2] CHOI D H, HOEFER W J R. The finite-difference-time-domain method and its application to eigen value problems [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Technology, 1986, 34(12):1464-1470.
- [3] XIAO S, VAHIDIECK R, JIN H. Full-wave analysis of guided wave structures using a novel 2-D FDTD [J]. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1992, 2(5):165-167.
- [4] WANG Bingzhong, WANG Xiaohua, WEI Shao. 2D full-wave finite-difference frequency-domain method for lossy metal waveguide [J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2004, 42(2): 158-161.
- [5] HOLLMANN D, HAFFA S, ROSTAN F, et al. The introduction of surface resistance in the three-dimensional finite-difference method in frequency domain [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Technology, 1993, 41(5):893-895.
- [6] MORGAN S P J. Effect of surface roughness on eddy current losses at microwave frequencies[J]. Journal of Applied Physics, 1949, 20(3):352-362.
- [7] LUKIC M V, FILIPOVIC D S. Modeling of 3-D surface roughness effects with application to coaxial lines [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Technology, 2007, 55 (3):518-525.

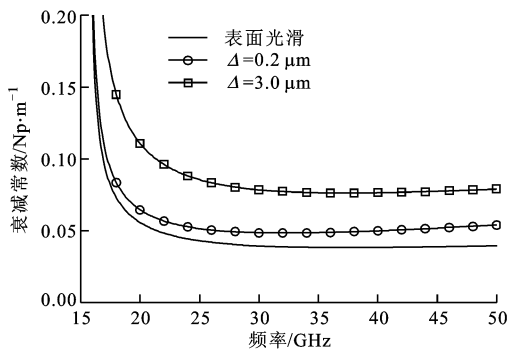


图4 不同粗糙度下矩形波导 TE_{10} 模式的衰减常数

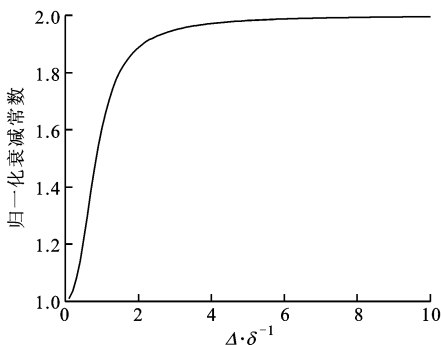


图5 归一化衰减常数随归一化粗糙度的变化曲线

(编辑 刘杨)